



歯車技術の基礎知識 (5)

—伝達誤差と振動・騒音—

北條 春夫*

1 はじめに

歯車は、入力回転を速度変動なく出力に伝達するのが原則であることは論を待たない。前回までで、インポリュート歯車はこれを満足すること、一方強度を考えたときには、応力によりその評価をすれば良いことを述べた。

応力が発生するのは、歯車が弾性体である以上そこに変形があるからである。歯車の変形は、歯が片持ち梁としてたわみ、接触点において面が沈む。仮にどちらも荷重に比例するなら、前回で紹介したように、二対かみ合いでの歯対あたりの伝達力は大胆に一对かみ合いの場合の半分になるから、歯の変形（ここではたわみと総称する）も半分になる。

以上のようにして、平歯車が動力を伝達して回転するとき、おのずと回転伝達の遅れとその変動が生じてしまうのである。これが動的挙動の原点であって、伝達誤差として評価され、振動の発生にもつながる。

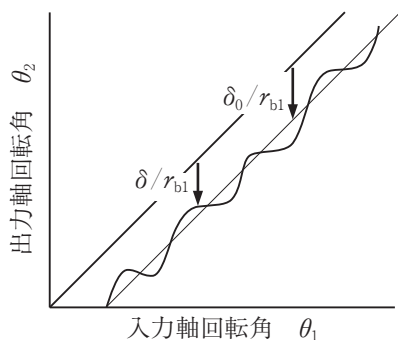


図1 回転の伝達の実際

2 歯車の伝達誤差と歯形修整

歯車が負荷を伝達して運転されているときの挙動は、ゆっくり（準静的に）回転しているときと、速く回転しているときとは様子は異なってくる。前者は弾性のみ、後者は弾性に加えて歯車の慣性が関係する。いずれにせよ、出力軸の回転角あるいは回転速度を入力軸の回転と関係づけて評価する重要な指標が伝達誤差とよばれる。

2.1 伝達誤差の定義

図1は歯車の回転伝達の一般的な概念を表している。数式表現では、

$$\theta_2 = z_1/z_2 \cdot \left(\theta_1 - \frac{(\delta_0 + \delta(\theta_1))}{r_{b1}} \right) \quad (1)$$

と表され、被動歯車の回転角度は駆動歯車の回転角度に比例して上昇する。負荷をかけると歯対がたわむので、作用線上での定常遅れ δ_0 と回転角に依存した変動分 $\delta(\theta_1)$ が重畳する。

また、式(1)の遅れ部分のみを抽出して例示すると、図2のようになる。ここでは縦軸を作用線上でみた歯車の遅れとして表し、これを静的負荷伝

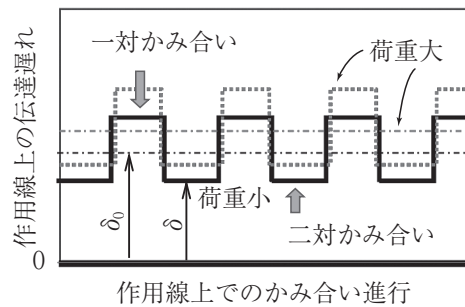


図2 歯車の伝達誤差 (平歯車)

* Haruo Houjoh 東京工業大学 名誉教授 工博

達誤差 (loaded static transmission error, LSTE) とよぶ。なお図2は、誤差のない平歯車の伝達誤差を模式的に描いたものである。はじめに述べた前提により、一对のみで荷重を伝達するときの伝達遅れは、かみ合いの進行に対して一定と仮定し、描いている。通常議論する伝達誤差は、この変動成分のことが多い。

2.2 伝達誤差の発生要因

歯車を製造すれば、歯面の加工上の寸法偏差や組み立ての姿勢ずれが歯面形状の偏差となる。そのうえ、伝達荷重により歯がたわむ。これらが伝達誤差の発生要因である。

2.2.1 歯面形状の偏差 歯面の凹凸（いわゆる歯形偏差、ピッチ偏差など）や歯車の偏心などは、歯面形状の偏差となって、無負荷でも伝達誤差を生じ、無負荷時伝達誤差 (no load transmission error, NLTE) とよばれる。ピッチ偏差があれば、二対かみ合いとなるべき領域でも一方の歯対は接触しないことも起きる。また、歯面にうねりがあればそのまま回転変動を生じる。

注記) 偏差とは：従来誤差 (error) とよばれていたが、今日では偏差 (deviation) という。日本では誤差と呼びならわされていることも多い。

ピッチ偏差：ピッチが歯ごとに変化するのを表すのがピッチ偏差である。単一ピッチ偏差と累積ピッチ偏差がISOで定義され、規格にはないが隣接ピッチ偏差（隣同士のピッチの差）がある。

2.2.2 歯対のたわみ 歯は一对かみ合いでは全伝達荷重を受けて変形する。二対かみ合いでは、歯面形状の偏差による遅れを含めて各対での荷重分担割合が決まるように変形する。駆動と被動の合計が歯対のたわみ量となって伝達遅れが定まる。また、荷重が増せば、形状偏差によって接触しない領域も接触するようになる。

平歯車において歯対のたわみ量は、その歯対が負担する荷重にほぼ比例するとの仮定の下、図2のように1：2の比率で遅れの量が切り替わる。その結果荷重が増加すると、平均の伝達遅れと同時に変動の振幅も大きくなる。

より緻密には、歯がたわむことによって歯対のかみ合い期間は長くなり、一对かみ合いが図の破

線のように短くなる。これは歯先が作用線上から外れた位置で相手の歯元と接触するからである。

図はあくまでも静的に回転させたときの様子であるが、伝達誤差の大きさを知り、その凹凸をなくすることが回転変動のない運転に必要となる。

2.3 たわみによる伝達誤差量の見積もり

2.3.1 図式による概算 細かい理論計算はともあれ、大きくくりでは、ピッチ点での歯対のたわみ量が分かれば歯先の位置でも似た値となる。その量は図3で見積もることができる。

図は小歯車と大歯車の歯のたわみ（コンプライアンス）を加算して求めるノモグラムになっている。二つの曲線群は左右対称に置かれている。横軸を転位係数として歯数ごとに曲線が描かれ、縦軸で歯の作用線方向のたわみ量を読み取る。駆動歯車と被動歯車で個々に求めたたわみ量の値を加算するのが中央の縦軸である。また、その逆数を取れば、ばね剛性が求められる。

かつては、ISO 6336-1：1996にも掲載されていたが、最新版では計算式に変更されている。

2.3.2 モジュールの影響 モジュール依存性には以下のような特徴がある。

a) 歯数一定の場合 歯車の大きさはモジュールに比例するが、単位歯幅、単位荷重に対するたわみはモジュールによらない。

このことは、単純はりの曲げ変形の理論から、以下のように類推できる。片持ちはりの曲げ変形において、力の作用点での変位 δ は、

$$\delta \propto \frac{F}{bE} \left(\frac{h}{\ell} \right)^3 \quad (2)$$

と表せる。ここで h は歯元の代表歯厚、 ℓ は歯元から作用点までの距離で、いずれもモジュールに比例する。したがって $(h/\ell) = \text{一定}$ 。

よって歯幅あたりの伝達荷重が同じであれば、変位 δ はモジュールによらない。一方、歯元応力は歯形係数とモジュールあたり伝達力で定まるので、モジュールに反比例する。

b) ピッチ円直径一定の場合 歯数はモジュールに反比例して段階的に変化する。歯数が少ないと歯形は歯元で痩せて、断面二次モーメントが小さくなる。したがってモジュールの大きいほうが曲げ変形は大きくなる。

なお、いずれの場合でも面圧による沈みについては、歯面間の相対曲率半径によって定まるので、モジュールが大きくなると沈み量は減る。しかしこの影響は曲げ変形に比べて小さいので、無視して考えてよい、と理解できる。

2.3.3 変形の図式計算例 変形量の実感を得てみよう。歯数を25：60で転位ゼロに設定する。代表的例として、ピッチ点で歯幅1mmあたり1kNを伝達する歯対は、図から約60 μm のたわみを生じることが分かる。二対かみ合いでは荷重分担により半分になるから、伝達誤差の変動分は30 μm となる。なお、モジュールが4なら歯元応力は500MPa程度⁽²⁾と厳しい値になる。

この伝達誤差がつくる回転角や回転角速度の変動が機械の性能に及ぼす影響の程度は、機械によっても異なるが、単に変動が無視できたとしても、応力の変動が疲労強度や振動騒音に影響を及ぼすので、注意が必要である。

2.4 伝達誤差の抑制

2.4.1 平歯車の歯形修整 伝達誤差の変動を平滑化するには、二対かみ合いでの伝達遅れを大きくして一対かみ合いのときの遅れ量に合わせればよい。そこで歯面の一部をそぎ落とす。これが**歯形修整**である（修正ではない）。

修整の大きさは歯先で最大、一対と二対の切替わり点でゼロとし、駆動歯面と被動歯面の双方に施す。歯面が後退した結果、接触しても荷重の分担量が減ることを加味しても、伝達遅れが大きくなり、伝達誤差曲線は平らになる。

このときのかみ合いの推移は**図4**のように表現できる。図では、かみ合いの進行を横軸にとり、駆動側と被動側の歯形検査曲線が上下向かい合わせに描かれ、接点位置が左から右へと移動する。すなわち図中の鉛直線A-A'と歯面との交点はその歯対の接点の位置である。修整歯面は太線で描いている。

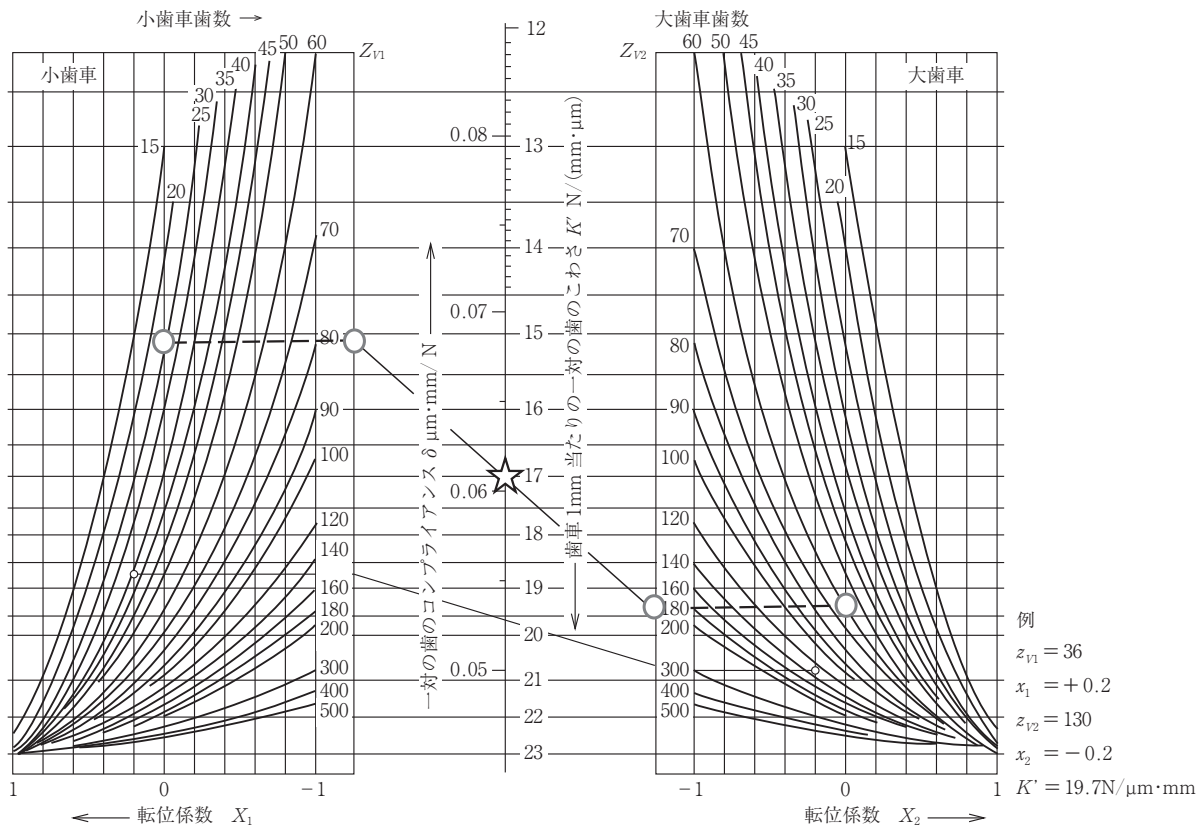


図3 歯のコンプライアンスから歯対のコンプライアンスを読み取るノモグラム⁽¹⁾

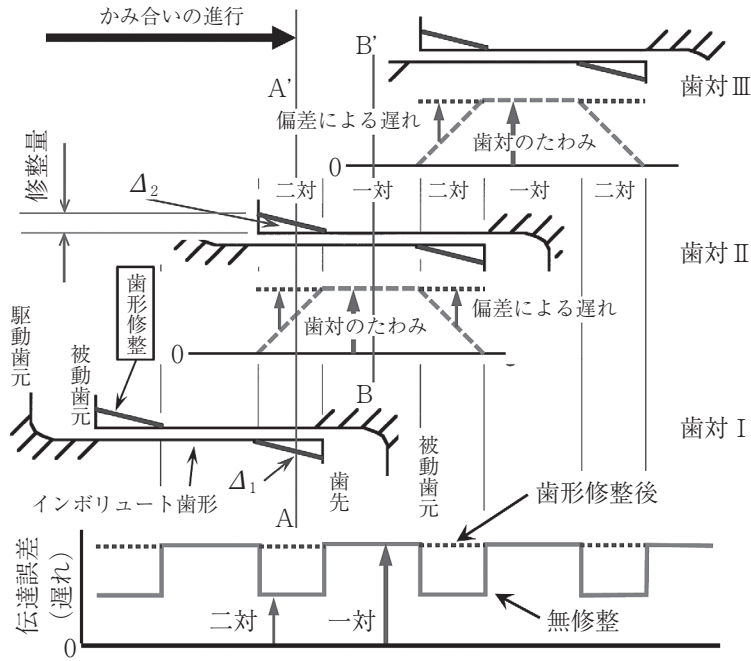


図4 平歯車のかみ合いの進行と伝達誤差および歯形修整の概要

接触点が修整範囲にあるときの歯車の進み遅れに注目するとき、歯を単純ばねと見立てれば変形は図5のように表せる。ここで Δ_1 、 Δ_2 は、図でそれぞれ先行する歯対Ⅰのかみ合い終わりと、追従する歯対Ⅱのかみ合い始めの修整による偏差量に対応する。

伝達力による修整前の位置からの変位を考えると、両歯対とも荷重により接触しているなら、見かけの変位 x と伝達力 F の関係は、

$$F = k(x - \Delta_1) + k(x - \Delta_2) = 2k \left(x - \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} \right) \quad (3)$$

となるから、

$$x = \frac{F}{k} - \left(\frac{F}{2k} - \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} \right) \quad (4)$$

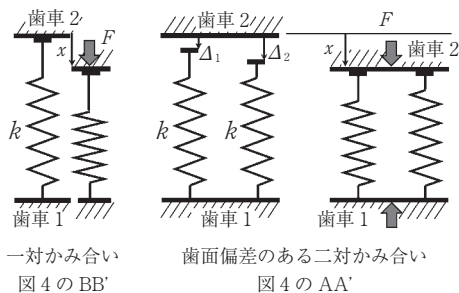


図5 ばねによる歯対の変形のモデル

歯形修整を適切に行うことは、かっこ内が常にゼロとなるように偏差を与えることを意味する。すなわち、

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \frac{F}{k} \quad (5)$$

となる。歯対Ⅱのかみ合い始めの位置では歯対Ⅰの駆動側で Δ_1 がゼロであって、このとき歯対Ⅱの被動側の修整量 Δ_2 は一对かみ合いのときの遅れ量に等しい。そこから、 Δ_2 が減少、先行する歯対の修整量 Δ_1 との和が一定となるようにすれば、伝達遅れが一様になるのである。

2.4.2 歯形修整と動荷重の関連

歯形修整前のインボリュート歯車対に負荷をかけて運転するときの挙動は、かみ合い始めにおいて二対かみ合いが始まる瞬間、図6のように修整

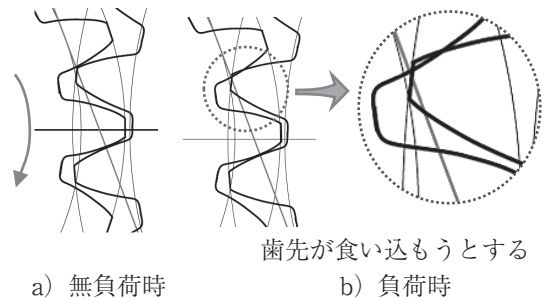


図6 負荷伝達時のかみ合い開始の様子

量分の食い込みが生じるとも理解できる。これはすなわち、歯先が相手の歯元に衝突することになるが、衝突点は作用線上からは外れている。

この瞬間は被動側の歯先がすべての荷重を負担しようとして、被動歯車を無理に加速させようと作用し、歯元に対して静的な伝達力より大きな力が作用する。これが**動荷重**である。一方、修整を適切に施した歯車対では、この衝突する領域が取り去られているので、滑らかに二対かみ合いが始まり、動荷重は発生しないと考えることができる。

ここでは、歯対がばねの作用を、歯車本体が慣性（質量）の作用をもつ振動系を構成する結果、そこには固有振動数が存在して、衝突に対しては過渡振動が発生することになる。

図7はその過渡応答の実測例で、被動側の歯元応力の時間波形である⁽³⁾。点線で示した静的な応力推移に重畳した過渡振動は、振動系の固有振動数の振動である。回転速度によっては、この振動

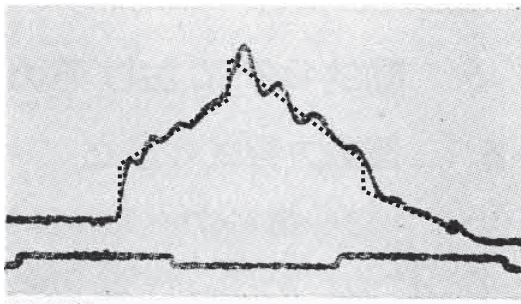


図7 動荷重の歯元応力測定結果例⁽³⁾
静的応力の推定値（破線）を追記

が継続的に増長されて共振現象につながり、騒音問題にも発展することもある。

このように歯元応力が大きくなることがあるので、単に静的な力学条件だけで強度設計を行うと、思わぬ疲労損傷に遭遇することになる。なお、動荷重は負荷の性質に依存する因子も存在するので、経験値として評価、推定することが多い。

2.4.3 はすば歯車と伝達誤差

平歯車の歯形修整は見合う伝達荷重のときの伝達誤差のみ有効に抑制できる。このため任意の負荷に対して伝達誤差を抑制するために、はすば歯車を用いることが多い。図8は、伝達誤差曲線の解析例である⁽⁴⁾。左端は平歯車、そして順次ねじれ角を増して、重なりかみ合い率を増した場合を示している。

平歯車では一對、二対の切り替わりで段差があるのが、はすば歯車では消滅して滑らかな正弦波状となり、その振幅は全かみ合い率が2.5を超えるころには著しく小さくなる。はすば歯車では、かみ合いが歯端の一点から始まるので、その位置ではたわみやすく負担する荷重も小さい。そして接触線が順次長くなってゆきたわみにくくなる、という特徴があるためである。なお、図の一点鎖線は一對のコンプライアンスを表し、破線は荷重分担率である。

以上から、はすば歯車に平歯車のような歯形修整を施しても大きな効果は得られない。代わりに

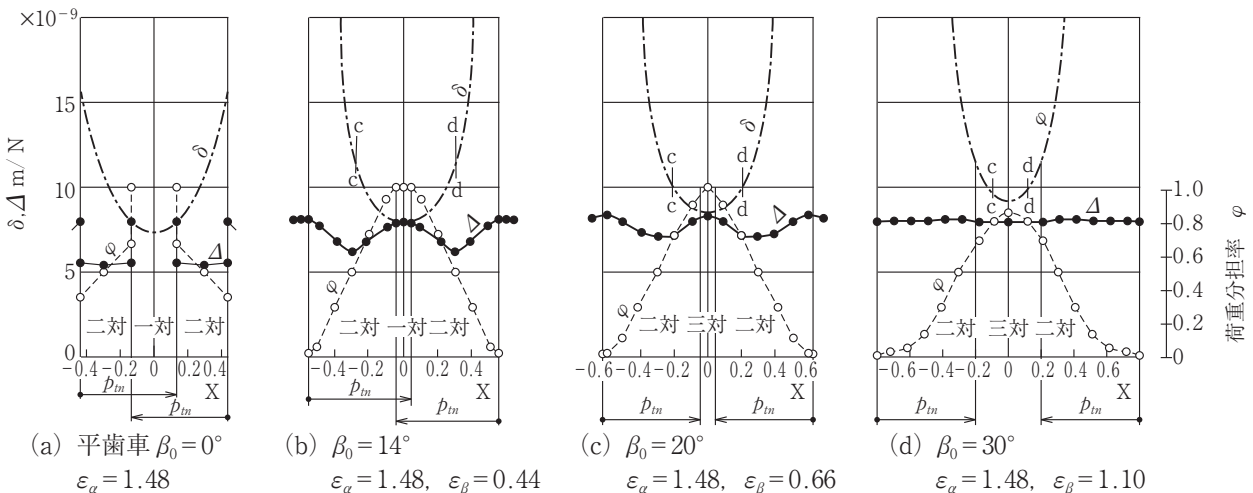


図8 伝達誤差の計算例（正面かみ合い率固定で、ねじれ角の異なるはすば歯車）⁽⁴⁾

歯面形状の3次元的修整が行われるが、その主目的は平歯車とは違って、加工と組み立てに起因する歯面形状の偏差や負荷の変化に鈍感にすることである。具体的には歯形、歯すじ両方向に丸みを与える修整を行うことが多い。

3 歯車の振動・騒音の基礎

3.1 振動・騒音発生元凶

歯車装置と振動・騒音はつきものである。騒音は振動する機械表面の振動に対応付けられる。振動は前節までの説明のようにして発生して、ばね剛さの変動や歯面形状偏差を完璧にゼロとすることは難しい。そのうえ歯対がばねの作用を持つ以上、それ自体が振動を続けようとする。

3.2 歯車に作用する力

かみ合いにおける伝達力は、歯車に対して偶力によるモーメント（回転力）と、作用線方向の並進力として軸受部に作用する。これは力学基礎の範疇であって、**図9**で理解できよう。

そして動荷重が生じれば、回転速度変動すなわち振動が生じる。この振動も一緒に軸・軸受に伝わる。その結果として歯車箱が振動し、箱の土台（あるいはマウント）を介してさらに振動が外部に伝ばし、それぞれの部位で音となる。

なお、動荷重は、歯車自体の慣性（並進と回転）を通じて軸受に作用するので、軸受部に作用する動荷重は、静的な力の伝達とは少し異なるが、ここでは言及しない。より厳密に考えると、軸もたわむのでこれも振動の伝達に影響を及ぼす。

3.3 歯車振動の基本モデル

歯車の振動系は**図10**のようにモデル化して単純化できるが、いくつかの前提がある。

- (1) 歯車は作用線方向にのみ力を伝達する。
 - (2) 歯車の歯の部分以外は剛体とみなす。
 - (3) ばねとして作用する歯対は順次交替してゆくが、これを単一のばねに置き換え、ばね剛さは平均値とそこからの変化分として取り扱う。
 - (4) 振動系には必ず減衰を考慮するが、まず質量-ばね系で定式化し、減衰は意識の外に置く。
- 以上に基づいたうえで、歯車の回転慣性を作用線上（ x 軸）での等価慣性質量に次式で置き換え、作用線上の直線運動に変換する。

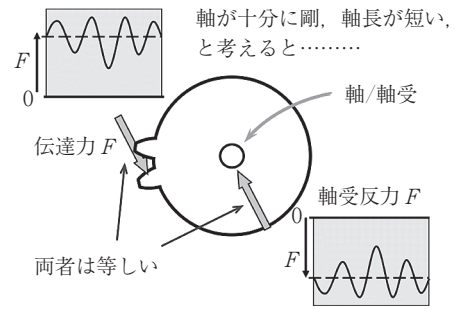


図9 歯車の伝達力の反力（静的な場合）

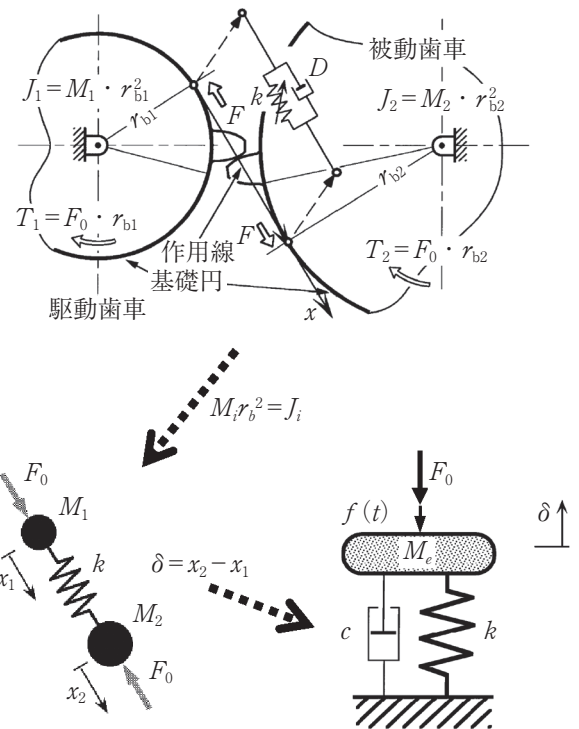


図10 歯車の振動のモデルと単純化

$$M_i r_{bi}^2 = J_i \tag{6}$$

ここで J は歯車の軸回りの慣性モーメント、 M はその作用線上の等価慣性質量、添え字 i は、駆動と被動である。

これにより作用線上のばねで結合された二つの慣性質量に伝達力 F が作用するように定式化し、さらに相対変位 δ を導入して質量を一つの等価慣性質量に変換し、以下の運動方程式を得る。

$$M_e \ddot{\delta} + D \dot{\delta} + k \delta = F_0 \tag{7}$$

ここで $M_e = \frac{M_1 \cdot M_2}{M_1 + M_2}$

F_0 はトルクに対応する作用線方向外力である。

3.4 かみ合う歯対のばねとしての取り扱い

先に示したように、一對と二対のかみ合いの繰り返しにおけるばね剛さは、単独ばねと並列ばねの区間をその長さで加重平均したうえで、次式のようにばね剛さが時間（回転角）に対して変化すると表現して取り扱う。

$$k = k_0 + \Delta k(t) \quad (8)$$

その結果、式(7)においては伝達力 F_0 によって、つりあいの状態になり、そこからばね剛さの変動で相対的な振動が生じる。これは、係数励振という振動形態であり、解析的には近似計算で解く。

なお無修整の平歯車では、ばね剛さの時間変動分は矩形波状になるので、近似の度合いは悪化する。ここでは歯面分離振動という非線形的な挙動が発現する。しかし、このような運転条件の下での運転は当然無理があるので、精度の高い解析をしても無意味である。

3.5 歯面形状の偏差を持つ場合への拡張

現実には、先に示した歯形修整も含めて、歯面形状の偏差がある中で振動が生じる。

偏差については、真のインボリュート歯面から歯面法線方向の偏差をもって偏差量 ε を定義すれば、図5の考え方にに基づき式(7)の変位にこれが組み入れられる。このとき、時間微分項には偏差成分はないので、式の表現は、

$$M_e \ddot{\delta} + D \dot{\delta} + (k_0 + \Delta k(t)) (\delta + \varepsilon(t)) = F_0 \quad (9)$$

ここで、ばね剛さの変動や歯面形状偏差を、歯車回転角の関数でなく時間関数としている。

カッコ内を展開し、 $\delta = \delta_0 + \delta(t)$ とする。ばね剛さの平均値と相対変位の平均値の積は静的伝達力とつりあうから、

$$M_e \ddot{\delta} + D \dot{\delta} + k(t) \delta(t) = - (k_0 \varepsilon(t) + \Delta k(t) \delta_0 + \Delta k(t) \varepsilon(t)) \quad (10)$$

高次の微小項を無視して、

$$M_e \ddot{\delta}(t) + D \dot{\delta}(t) + k(t) \delta(t) \cong - (k_0 \varepsilon(t) + \Delta k(t) \delta_0) \quad (11)$$

が得られる。

式(11)は、左辺が振動系を表し、右辺が見かけの起振力 $f(t)$ を表す項となる。右辺第1項は偏差 ε による変位加振という形態となる。第2項は係数励振項である。

さて、歯車はそもそも精度高く製造されてこそ

所定の性能が発揮できるものであるから、常識を超えた偏差をもつ歯車の振動挙動は論外である。所定の負荷の下で、誤差があっても歯面間は接触しているとの前提で成り立つ近似式である。

3.6 歯形修整と振動

式(11)に基づき再度、歯形修整の効果を考えてみる。運動方程式には加速度 $\ddot{\delta}$ 、速度 $\dot{\delta}$ が含まれる。ゆっくりと準静的に回転させると、これらの項はゼロとなるので、

$$k(t) \delta(t) \cong - (k_0 \varepsilon(t) + \Delta k(t) \delta_0)$$

$$\delta(t) \cong \frac{- (k_0 \varepsilon(t) + \Delta k(t) \delta_0)}{k(t)} \quad (12)$$

これは静的負荷伝達誤差そのものである。なお負荷の影響は δ_0 に組み入れられている。

この値が常時ゼロとなるなら、式(11)の振動に関わる強制力の項が消えてしまうので、振動が発生しないことになる。すなわち、負荷伝達誤差がゼロなら、振動は発生しない理屈となる。

次に伝達誤差がゼロでない場合について考える。例えば平歯車がかみ合い率が2の場合とか、はすば歯車の場合には、 $\Delta k(t)$ がゼロに近いとみなせる。すると式(12)の分母は一定と近似でき、分子第2項も消え、歯面の偏差が伝達誤差あるいは振動を支配することになる。

このように伝達誤差の大きさは振動の大きさとの相関が高い。以上から、振動の起振力の大きさの指標として負荷伝達誤差が用いられる。また、低振動に設計された歯車の振動には、歯面の形状偏差の寄与が高いといえる。

3.7 振動の周波数

3.7.1 かみ合い成分 歯車は、かみ合い周波数（歯数×毎秒の回転数）で振動するのが基本であると考えられている。しかし、上述のような環境下では起振力は正弦波になることは稀であり、この整数倍の周波数成分も同時に生じる。これらは高調波とよばれるが、歯車屋は、かみ合い周波数をかみ合い1次、その n 倍をかみ合い n 次、全体をかみ合い成分とよぶ。

歯車の振動波形の一例は図11上段に示すようになっており、歯面形状の偏差により時間的に定常ではない。その周波数スペクトルは下段のようになり、かみ合い成分が主ではある。それぞれの成

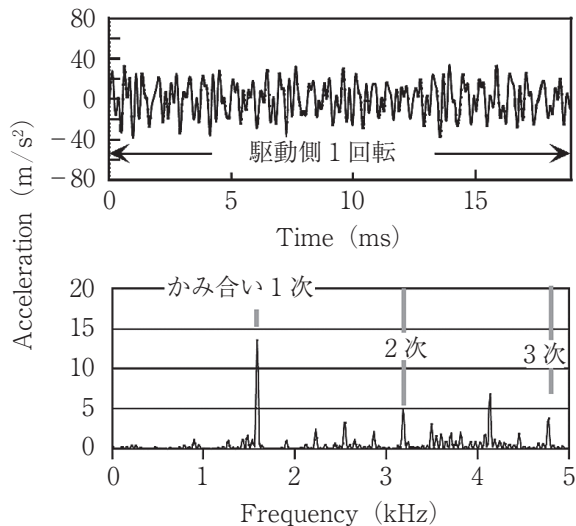


図 11 はすば歯車の振動計測結果例

上：回転振動の加速度波形，下：振動の周波数スペクトル

分の振幅は、起振力の波形と、振動系の周波数特性により決まる。また、歯形修整を施した平歯車では、かみ合い1次の振動が抑制されるために、高次成分が逆に目立つこともある。

3.7.2 かみ合い非整数次成分 歯面に形状偏差等が加わると、かみ合い成分とは別にかみ合い非整数次成分が発生する。図のスペクトルに見られるように、種々の周波数成分が認められる。これらは以下の2通りの成分として理解できるが、かみ合い成分でないためにゴーストノイズとよばれることも多い。このような成分は、図11の振動波形が1回転にわたって一様でないことに起因している。

a) 変調成分 例えば、歯面形状偏差の形がそれぞれの歯で同じでありながら、大きさが変化するとき、振動の振幅は1回転を周期として変動することが予想できる。これは、振幅変調とよばれる現象として理解される。この例では、かみ合い整数次成分の両側に対称に、複数対の側帯波成分が観測される。

また、ピッチ偏差が存在すると、微視的にはかみ合いの周期が変化するため、かみ合い周波数が変動し周波数変調となる。これも上記と似たように側帯波が観測されるが、位相関係が異なる。こ

れらが混在することが多く側帯波が左右対称に観察されるときは限らない。

b) 回転整数次成分 振動の周期とは、ある瞬間の状態から、これと同じ状態に戻るまでの時間である。歯車に当てはめると、同じ状態に戻るには、ピニオンのAという歯とギヤのaという歯の組み合わせが再度かみ合う状態までの時間である。すなわち、歯数 z_1 と z_2 の最小公倍数回だけかみ合う時間となる。仮にギヤの歯が完全無欠であれば、周期はピニオンの1回転となる。

以上の認識に鑑み、歯車の振動は駆動軸、被動軸それぞれの回転周波数とその高調波（回転整数次）で発生しうることになる。実は、かみ合い整数次成分も、これらの回転整数次成分（回転の歯数次）でもある。変調成分もまた同様である。

なお、歯車のかみ合い非整数次成分が観察されると、非線形ということばで現象を理解しようとする傾向もあったが、筆者の見解としては、上述の理解の中でほとんどの振動現象が起きていると思っている。

4 おわりに

歯車の動的挙動として、伝達誤差と振動に関して基本的理解をまとめた。振動低減はそれだけでもうまくゆかない一面もある。次回は振動に関する補足と、そのほかの基本事項を説明して本講座を終える予定である。

参考文献

- 1) ISO 6336-1 : 1996, Calculation of load capacity of spur and helical gears Part 1 : Basic principles, introduction and general influence factors.
- 2) 新歯車便覧, 日本歯車工業会 (1990).
- 3) 歌川正博：動力伝達用平歯車の動荷重に関する研究, 日立評論41巻9号 (昭和34年9月) pp. 1147-1156.
- 4) 梅澤清彦：はすば歯車の負荷かみ合い試験 (第3報), 日本機械学会論文集 (第3部) 40巻330号 (昭和49年2月) pp. 576-584.