

歯車技術の基礎知識 (4)

— 歯車の強度 —

北 條 春 夫*

1 歯車の強度と性能

歯車が動力を伝達する際に要求される基本性能は、滑らかに回転し所定の運転時間内で損傷しないこと、すなわち主に歯の強度が十分あることである。これは、定格トルクの言葉でよく表示される。これに加えて損失が少なく（高効率）、静粛（低振動）で、コンパクトであることも求められる。これらは設計によって担保されるべきことである。

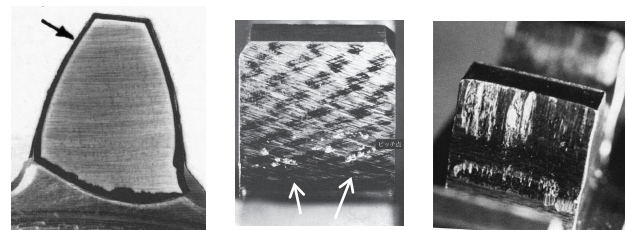
本稿では歯の強度に関する力学的基礎をまとめ、ISO等の規格に基づく強度設計法の理解を助ける。このために平歯車の歯元応力と歯面応力（面圧）の基礎的考え方を示す。対象を平歯車に限ることにより理解を容易にする。最後にはすば歯車への類推についてコメントする。

強度の知識は、損傷した歯車のトラブルシューティングにも欠かせない。なお、歯車が損傷したと聞かされるとき、装置の軸や軸受が損傷していることも多々あるようで、「歯車が壊れた」の一言だけで「歯車」と決めつけないようにしたい。

2 歯車の損傷

歯車の損傷のうち、致命的なのは歯が折損（欠歯）して回転しなくなるものである。また歯面が著しく傷んで、異常な騒音や振動が発生し、安定的な運転ができなくなるものもある。

主要な損傷は図1のように類別される。(a)は歯元で折損した場合の端面写真である。これは、歯元曲げ応力の繰り返しの疲労により折損したものであるが、単純な過荷重でも破損する。(b)



(a)折損（疲労） (b)ピッチング (c)スカuffィング

図1 歯の損傷三態⁽¹⁾

は歯面に小さな穴（ピット）を生じたもので、ピッチング（pitting）とよぶ表面疲労の例である。(c)は、歯面が摩擦熱で熔融して荒れるもので、これはスカuffィング（scuffing：またはスコーリング）とよばれる。ほかにも多種多様な損傷があるが、詳細は参考文献(1)にまとめられているので参照してもらいたい。

このような損傷発生の様態は、実際に運転される負荷条件にも依存し、歯元の曲げ応力や歯面間の面圧が許容される値を超えると発生リスクが高くなる。

なかでも疲労損傷は、静的な許容応力よりも小さい応力で破断に至るので、疲労強度の観点が必要とされる。この応力の許容値を知るには経験に基づく知見も重要で、材料の選択、熱処理などの表面処理にも留意が必要である。

以上の背景のもと、応力自体は解析的に推定しやすいから、的確に算出できるようにしておかなければならない。また、歯面の誤差が応力を増減させることにもなる。仕上げ処理も含めて、製造過程における各種のばらつきの程度にも、強度設計において十分注意を払わなければならない。

* Haruo Houjoh 東京工業大学 名誉教授 工博

3 歯元応力の評価法

3.1 歯における力学の基本

歯車の歯は、ずんぐりとした片持ちはりともみなせる。したがって歯面に荷重が作用すれば、はりにとっては曲げモーメントとせん断力の両方を生じて変形が起きることになる。

3.1.1 歯面に作用する力と成分分解

歯車に作用する伝達力は、図2のように、歯面の法線方向（作用線方向）を向いている。歯面の接線方向にはピッチ点を除いて摩擦力が潤滑油を介して作用するが、その大きさは小さいので無視する。

この伝達力による歯の変形や応力を論ずるときは、歯の中立線上に着力点を移動し、これに垂直な成分 (F_s) とこれに沿う成分 (F_r) に分解する。このうち前者が歯の曲げやせん断変形に寄与し、後者は、歯を歯たけ方向に圧縮する。

作用線方向の力 F_n は伝達トルクから算出されるピッチ円周上の接線力 F_t と圧力角 α_n から $F_n = F_t / \cos \alpha_n$ と表せるから、歯の中立線に垂直な成分 F_s は、

$$F_s = F_t \frac{\cos \alpha_{Fn}}{\cos \alpha_n} \quad (1)$$

となる。

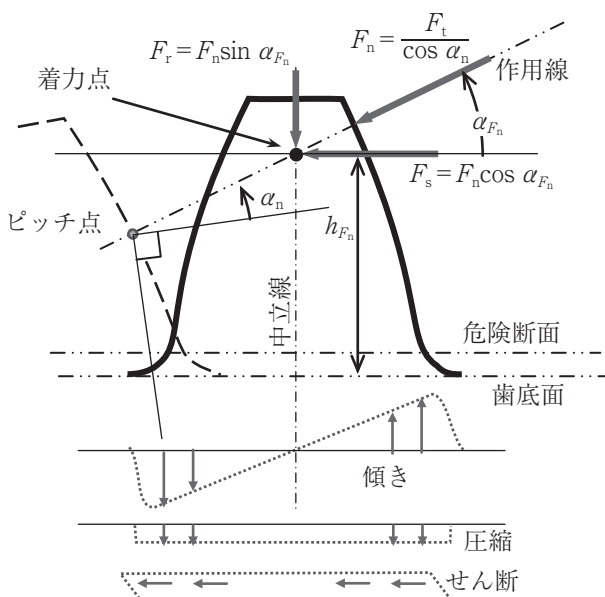


図2 歯の作用力の成分分解と各応力の概要

3.1.2 歯元の応力

はりの変形の理論では通常薄肉のはりを考える。はりは曲げモーメントによって変形し、せん断変形は無視される。そしてはりの付け根に、引張応力と圧縮応力の最大値が生じる。特に引張に注目して曲げ応力とよばれることも多い。この応力計算が歯車の歯に適用可能かはいろいろ議論があるが、歯車の歯元の応力についてもこの曲げ応力の仮定に立脚している（図3参照）。

実際のところ歯車の歯は厚さと高さが同程度なため、せん断変形が曲げ変形に対して無視できない。そのうえ図2に示したように、圧縮変形も生じる。また、土台の傾きも生じ、歯元隅肉部の形状の影響もあろう。このようにして単純はりの理屈だけで歯元の応力を推定するのは、厳密性に欠けることにも留意が必要である。

さて着目点での曲げ応力 σ は、図3中の記号を用いて、

$$\sigma = \frac{M}{Z} = \frac{6M}{bt^2} \quad (2)$$

と表されるので、これを出発点に以降の議論を進める。

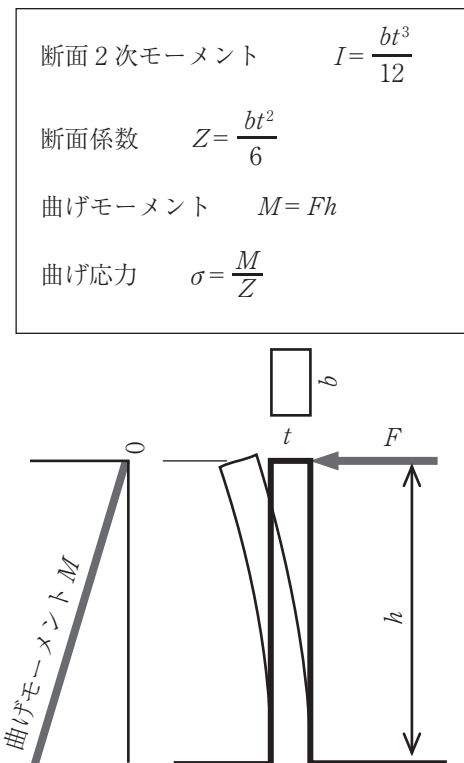


図3 単純はりの曲げ

3.2 危険断面（応力最大の位置）

歯車の歯面に荷重がかかれば、引張応力が最大となるのは歯元隅肉部であろう。この応力が材料の引張強さを超えれば歯は折れ、あるレベルの下で繰り返せば疲労で破断する。この断面を、危険断面（critical section）とよぶ。

図3の単純はりを基に平歯車の歯を対比して考えるとき、伝達荷重による応力が歯元隅肉部で最大となることは、以下の説明で理解できよう。

(i)矩形単純はりの場合は、断面係数が歯の高さ方向には一様であるから、モーメント最大の点（根元）が曲げ応力最大の点となる。

(ii)歯を放物線状はり（図4（a）の破線参照）と仮定し、その頂点が着力点とすると、単純はりの理論上、歯の高さ方向の各位置での断面係数とモーメントの比が一定となるから、表面での曲げ応力はどの位置でも同じになる。

(iii)実際の歯で、この放物線が歯形曲線に内接するように描けるなら、歯の曲げ応力の最大値はその接点位置にある（Lewis の考え方）。

この考えに基づけば、図4（a）において、標準的な歯形に対しては破線の放物線が描けるので、納得できる。一方細点線のように、歯厚の薄い（低圧力角とか高歯の）場合の接点は歯元よりも著しく高い位置となる。その上、着力点の高さが変化しても変化する。ところが経験則では常に歯元隅肉部で破断する。このため、危険断面位置の決定は煩わしい。

そこで提案されたのが Hofer の30度接線法とよぶ、単純な手順で最大応力の位置を一意に決め

る方法である（図4（b））。この方法は、歯の中立線に対して30度傾斜した直線と、歯形曲線との接点位置を危険断面位置とするものである。図のように、歯数の異なる歯車でもほぼ同じ位置となる。理論解ではないものの、経験的によい近似を与えることがよく知られている。

3.3 歯形係数

危険断面における曲げ応力は式(2)で求められるので、歯車の歯でも、危険断面位置での断面係数とそこからの着力点高さ、そして着力点における力の大きさがわかればよい（図3）。

そこで、計算の利便性を図るため歯形係数 Y_F を導入し、式(3)のように表す。

$$\sigma = \frac{F_t}{bm} Y_F \left(= \frac{6F_s \cdot h_{Fn}}{b \cdot s_{Fn}^2} \right) \quad (3)$$

$$\text{但し、} Y_F = \frac{6(h_{Fn}/m)}{(s_{Fn}/m)^2} \cdot \frac{\cos \alpha_{Fn}}{\cos \alpha_n} \quad (4)$$

式(3)第1項は単位歯幅、単位モジュールあたり接線力である。 Y_F は、危険断面の厚さ (s_{Fn})、接点の位置、着力点高さ、伝達力の方位角と、かみ合い圧力角という幾何学的ファクタのみで構成される。そして、各寸法がモジュールで無次元化された無次元量となっている。

また、 Y_F は力の着力点の高さによって変化するので、伝達力が作用する位置（かみ合いの位置）を明確にして求めなければならない。歯形係数の一例として、標準基準ラック歯形を参照して造られる歯車の歯先に伝達荷重が作用した場合を、図5に示す⁽²⁾。

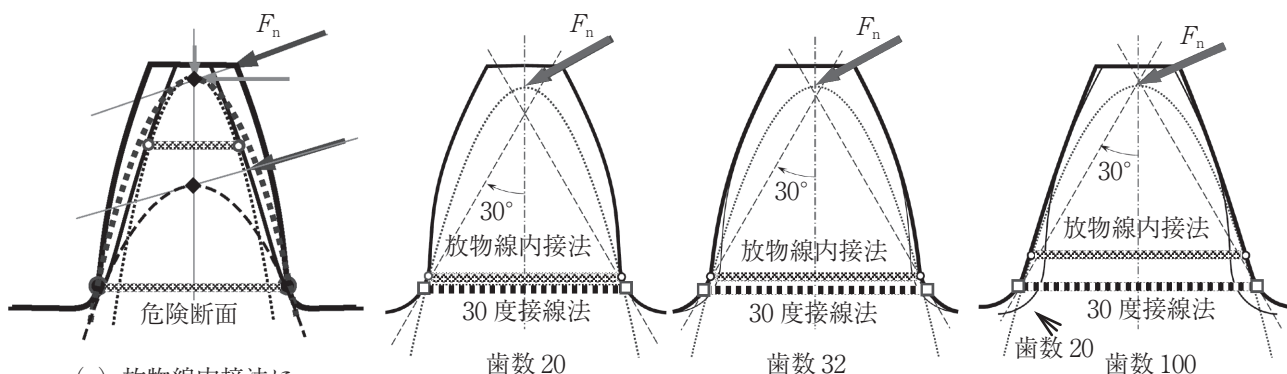


図4 放物線内接法とホーファーの30度接線法による危険断面位置の違いと歯数の影響

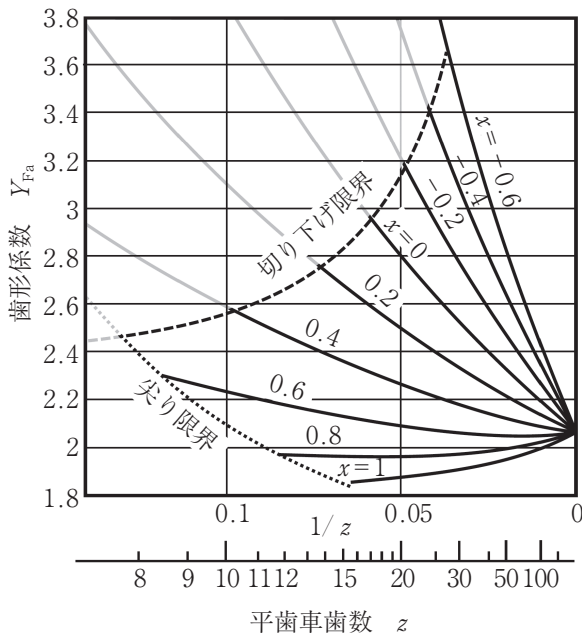


図5 歯形係数の例：標準基準ラックを参照して作られた歯車で、歯先に伝達力が作用した場合。添え字 a は歯先を表す。

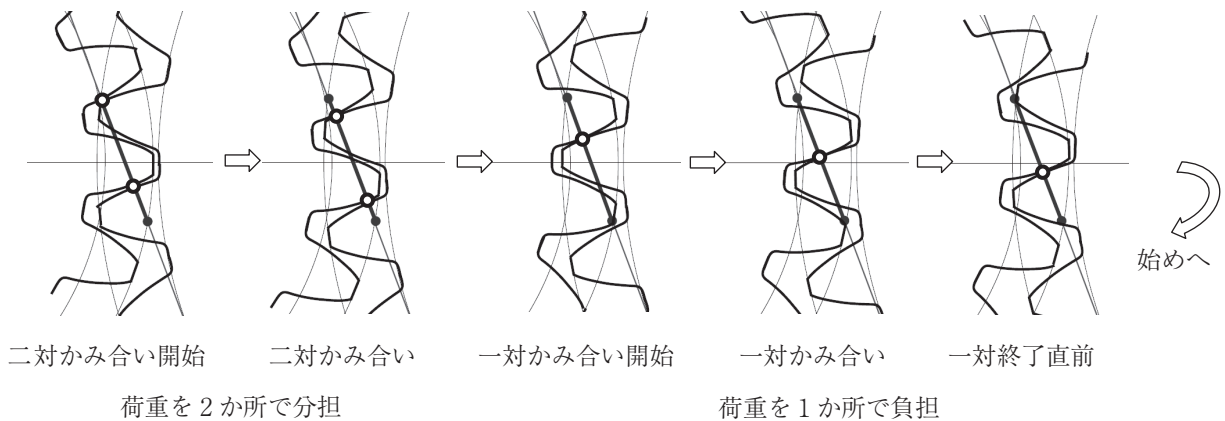


図6 歯対による荷重の分担の推移

なお、次に述べる曲げの最悪荷重点での歯形係数は、最新のISO規格にも用いられているので、区別して理解する必要がある。

3.4 曲げの最悪荷重点

危険断面の位置は定められたが、次に危険断面での引張応力が最大となる荷重の位置を確認する必要がある。歯車は一对かみ合いと二対かみ合いが繰り返され、その進み具合は図6に示すとおりである。ちなみに通常の平歯車はかみ合い率が1.4程度から1.8程度である。

駆動側歯車の歯元が相手の歯先とかみ合いを開始するときには、先行する歯対がかみ合っている。

このときそれぞれの歯対で負担する荷重は、大胆に全荷重の1/2ずつと見積もることができる（注記参照）。その結果、この歯の歯元危険断面における曲げモーメントは図7のように推移する。

駆動側の歯として図を解釈すれば、かみ合いは歯元から歯先へと推移するので、始めの二対かみ合い領域の曲げモーメントは小さい。一对かみ合いに切替わるとき、曲げモーメントはその瞬間に2倍になる。さらに、一对から二対へ切替わると再び半減し、荷重点が歯先に向かうにつれて大き

注記) 二対かみ合いの際の荷重の分担は厳密に等しいわけではなく、歯の変形を加味してその分担率が決定される。しかし、一对がかみ合い始めならもう一对はかみ合い終わりの状態であって、どちらも歯元と相手の歯先の接触である。よって、同じ荷重を分担すると近似できよう。

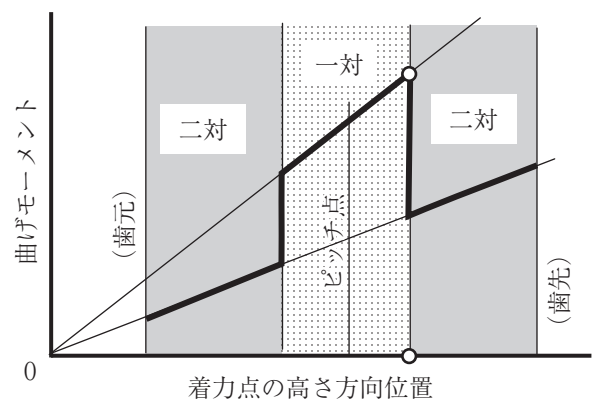


図7 歯元曲げモーメントの推移 (横軸に注意)

くなる。しかし、荷重点が歯先に達しても一対から二対への切替わり点より高くはならない。

したがって曲げモーメントが最大となるのは、かみ合いが一対から二対へと切替わる直前の点（一対かみ合い領域の中心から遠い側の端点）となる。この点を曲げに対する最悪荷重点（critical loading point）とよぶ。

3.5 設計における曲げ強さ判断の考え方

歯車の強度設計においては、ISO6336-3:2019⁽²⁾や、JGMA6101-02:2007「平歯車及びはすば歯車の曲げ強さ計算式」⁽³⁾に計算方法がまとめられている。

ここでは設計に際しての利用法の本質を示すことにする。規格では、ここで示す以外に種々の係数が導入されているので注意が必要である。

3.5.1 歯元の最大応力の算出

伝達トルクからピッチ円周上の接線力（tangential force）を算出し、モジュール、歯数、転位係数等を定め、後は計算式と図表に基づいて計算を進めて運転時の最大歯元応力を求める。この時、危険断面位置は明示的に求める必要はない。

歯元応力は式(3)を修整して、

$$\sigma_F = \frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot Y_F Y_S \quad (5)$$

$$\sigma_F = \frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot Y_{Fa} Y_{Sa} Y_\varepsilon = \frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot Y_{FS} \quad (6)$$

のいずれかの方式で求める。

式(5)は最悪荷重点に力が作用することを出発点とする場合で、ISO規格にmethod Bとして示されている。この方法では、最悪荷重点の位置が変わるとその都度歯形係数を求める必要がある。また、 Y_S は応力修正係数とよばれ、図2で示した各種変形の影響に加えて、応力集中も考慮に入れる係数である。

一方式(6)は歯先に力が作用することを出発点とした簡易計算法で（添え字 a は歯先を意味する）、JGMAに規定されている。図5に示した歯形係数はこの場合の例であって、最悪荷重点に力が作用する場合への変換はかみ合い率係数を用いて、

$$Y_\varepsilon = 0.25 + \frac{1}{\varepsilon_\alpha} \quad (7)$$

と近似的に表す。

なお式(6)の方式は、ISOの旧版（2006）には記述されていたが、2019版には存在せず、前の版をキャンセルしたと記述されている。

上記のいずれの方法においても、これ以外に設計寿命などの係数も乗じて、危険断面での応力値を推定する。

3.5.2 許容応力との比較

次に、経験も含めて実用上問題なく運転できる応力の最大値を許容応力 σ_{FP} （permissible stress）として定め、

$$S_F = \frac{\sigma_{FP}}{\sigma_F} > 1 \quad (8)$$

を満足するように設計値を調整するか、材料と熱処理方法やショットピーニングなどを検討する。

この許容応力は、当該材料を歯車に適用したときの強さから出発し、運転の仕方を考慮するサービスマーク（ K_a ）、かみ合い率を主因にする動荷重係数（ K_v ）、場合によっては寿命係数などの補正係数を乗じて求める。

S_F は安全率（safety factor）とよばれ、設計思想を反映すると同時に、客先との合意が要求されることもあるファクタで、大きすぎると過剰品質となりうる。

4 面圧の評価法

歯面と歯面は、点や線ではなく面で接触する。したがって、接触面という局所における力学は、面圧で整理しなければならない。

面圧の高い部位においては、その繰り返し、ピッチングを発生させる。また、これに滑りが重なれば摩擦現象となるから、発熱をもたらす。このとき熱が十分に放散しなければ温度上昇を招き、互いの歯面が溶融したり、溶着してスカuffingを生じる。

4.1 ヘルツ応力

面圧の算出は、ヘルツ（Hertz）の接触理論に基づいて、2面間の相対曲率をもとに算出される。図8は面圧を説明する概略図であって、2円筒の母線が接触線となるように接して押し付けられている。理論は無限長の円筒同士の接触である。接触線近傍は作用する力により弾性変形し、図のように面に垂直方向の圧力分布を生じる。これをへ

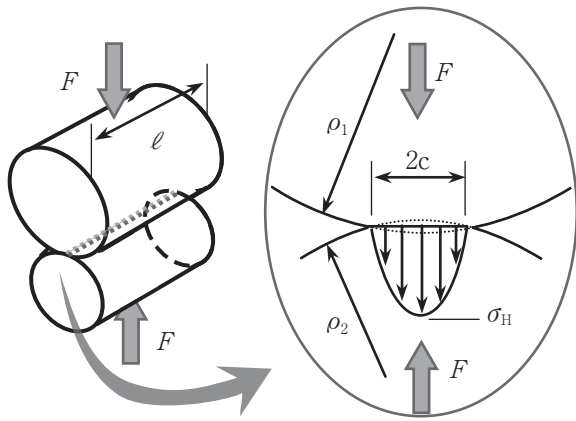


図8 2円筒の接触によるヘルツ応力

ヘルツ応力 (Hertzian stress) とよんでいる。

技術者が一般にヘルツ応力とよぶのは、その応力の最大値で、これを σ_H と表す。図のように接触幅を $2c$ とし、切り出した長さを l 、そこに作用する力を F とすれば、ヘルツ応力は、

$$\sigma_H = \frac{2F}{\pi c l} \tag{9}$$

$$c = \sqrt{\frac{4F \rho_r}{\pi l} \cdot \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)} \tag{10}$$

E , ν はそれぞれの材料のヤング率と、ポアソン比である。また ρ_r を相対曲率半径といい、

$$\rho_r = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \tag{11}$$

で表される。これらの式は、半径と材質の異なる2円筒を、同じ半径、同じ材質の円筒に置き換えていることになる。

4.2 歯面間の相対曲率半径

歯面同士の接触は、前述の円筒と円筒の接触に置き換えて取り扱う。図9に示すように、歯車の歯面は作用線上で接触している。その接触点における歯面の曲率半径はそれぞれインボリュートの起点からの距離で表され、両者の和は作用線上の両起点間の長さである。すなわち、

$$L = \rho_1 + \rho_2 \tag{12}$$

である。その結果歯面間の相対曲率半径は、

$$\rho_r = \frac{\rho_1(L - \rho_1)}{L} \tag{13}$$

となって、図10に示すような上に凸の2次曲線に変化する。相対曲率半径の最大値は、作用線の両起点間長さの midpoint の位置にあるから、必ずしも

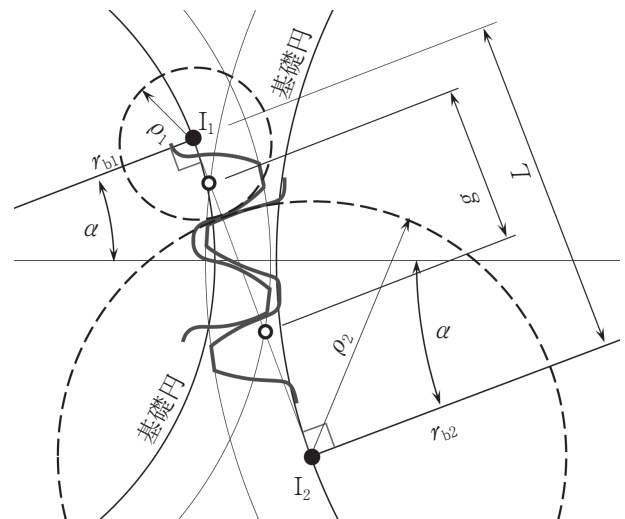


図9 円筒による歯面接触の近似表現

ピッチ点の位置にあるわけではない。

4.3 面圧の最悪荷重点

ヘルツ応力はこの相対曲率半径の平方根に逆比例し、一対二対の切替わりによる荷重分担を加味すると、図中の細点線のように推移する。図では、ヘルツ応力が最大となるのは二対から一対への切替わり（一対かみ合い範囲の小歯車中心に近い側の端点）であり、これが面圧に関する最悪荷重点となる（図中○印）。

4.4 設計における面圧強さの考え方

4.4.1 ピッチング強度

実際の歯車設計においては、ISO6336-2 : 2019 や、JGMA6102-02 : 2009 「平歯車及びはすば歯

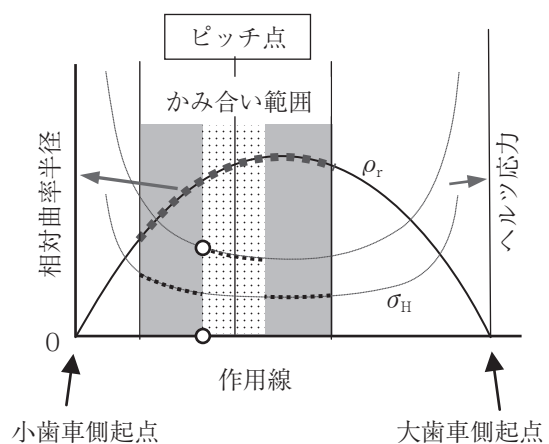


図10 接触点における相対曲率半径とヘルツ応力の変化

車の歯面強さ計算式」に計算方法がまとめられている。これらは、ピッチングに対する許容面圧を与えるものと理解すればよい。詳細は省くが、曲げ強さと同様であり、以下の通りとなる。

まず、ピッチ点でのヘルツ応力を求める。次に最悪荷重点でのヘルツ応力に換算する。規格では、式を構成する各種ファクタの積に分解して表して、計算手順を立てやすくしている。例えば、式(9), (10)の基本式は、

$$\sigma_H = Z_E \cdot Z_H \cdot Z_\epsilon \cdot \sqrt{\frac{F_t}{d_1 \cdot b} \cdot \frac{u+1}{u}} \quad (14)$$

と表記される。 Z_E はヤング率の項であり、

$$Z_H \sqrt{\frac{F_t}{d_1 \cdot b} \cdot \frac{u+1}{u}}$$

が相対曲率半径と力の項、 Z_ϵ がピッチ点から最悪荷重点への変換の項である。ただし、 u は歯数比である。

これとは別に、材料の歯車としての許容面圧 (σ_{HP}) を運転条件等による各種係数を乗じて求め、比較する。この際安全係数も考慮して設計する。

4.4.2 スカフティング強度

一方、スカフティングにおいては、発熱量と関連のある指標値を用いる。発熱量は摩擦力 (μP , μ は摩擦係数, P は圧力) とすべり速度 (V : 第3回参照) の積に比例する。これを PV 値とよぶ。

しかしこれでは現実のスカフティング発生との相関が取りにくいいため、 PVT 値とよぶ指標も活用されるようになった。 T は、かみ合いピッチ点から接触点までの距離であって、経験的に PV 値よりも相関があるといわれている。

さらには、瞬間温度 (閃光温度: flash temperature) という指標もある。

5 はすば歯車の強度の考え方

はすば歯車では接触線が軸と平行でないため、歯の弾性挙動は複雑になる。このため、その強度については基礎知識の範囲を超えるので省略するが、今日でも相当平歯車 (virtual spur gear) による類推が規格にもあるのでこれを紹介するにとどめる。

図11は、はすば歯車対のピッチ円筒を描き、その軸直角面をねじれ角だけ傾けた切断面を表して、断面は横長の楕円 (太線) となる。そし

て接点における楕円の曲率半径をピッチ円にもつ相当平歯車に置き換えて、種々の計算を行う。

相当平歯車の歯数は明らかに整数ではないが、単にかみ合いの諸量を計算するパラメータなので、非整数でも問題はない。厳密性はないものの、ねじれ角が極端に大きくない歯車であれば、そこそこの近似ができるものと思われる。

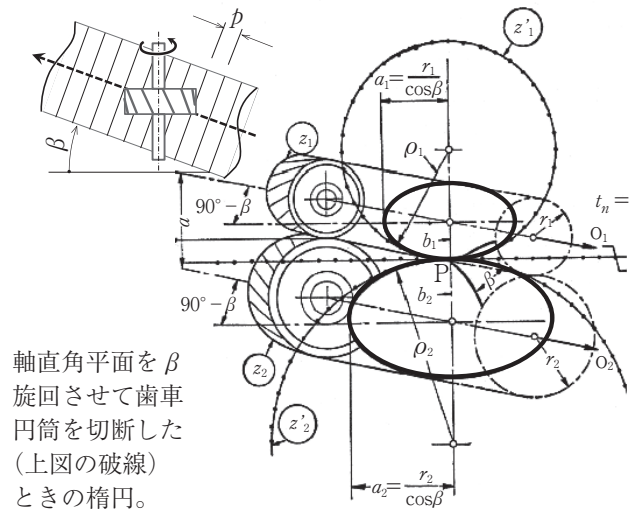


図11 はすば歯車の相当平歯車への変換 (4)

6 おわりに

強度の課題は経験も重要で、応力を計算できるだけでは十分とはいえない。規格の計算式に各種係数が用いられるのもその不確定性の存在を意味する。減速機の開発では、量産試作で強度不足が判明すると、寸法を変えずに、表面処理などで対処することが多々ある。

次回は、動的性能を中心に解説する。

文献)

- (1)久保愛三編, 歯車損傷大全, 公財) 応用科学研究所, 2019.10.
- (2)日本歯車工業会規格 JGMA 6101-2 (2007), 平歯車及びはすば歯車の面圧強さ計算式, JGMA6102-2 (2007) 同曲げ強さ計算式.
- (3)ISO 6336-2:2019, 6336-3:2019 Calculation of load capacity of spur and helical gears-Part 1 pitting strength, Part 2 bending strength.
- (4)歯車便覧: 日刊工業新聞社 (絶版)