

# 歯車技術の基礎知識 (3)

## — 続インボリュート歯車, はすば歯車 —

北 條 春 夫\*

### 1 はじめに

第2回ではインボリュート歯車の幾何学的に見た利便性を、主要なパラメータであるピッチ、モジュール、圧力角により理解した。今回は、インボリュート曲線の特性を活かした歯車の寸法管理の一方法であるまたぎ歯厚、さらに歯車を運転する際の性能指標に利用される、かあみあい率とすべり率を理解する。また、はすば歯車の幾何学的理解の基礎へと展開する。

### 2 またぎ歯厚

歯車の製造においても寸法管理が重要なのは言うまでもない。特に歯の部分の寸法は円滑な噛み合いのために慎重に行わなければならない。その際に歯厚あるいは歯溝幅を計測する必要がある。

#### 2.1 歯車加工の進行

歯車加工は、第2回に示したホブカッタなどを用いて、半径方向に切り込んでゆく。図1に示すように、歯車は加工の初期においては歯先の欠

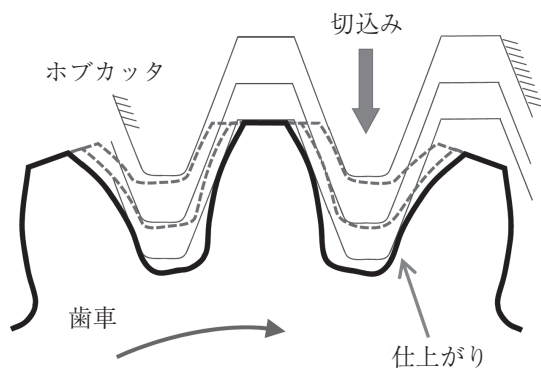


図1 カッタによる歯切りの切込みの進み方

けた正転位の状態から仕上がり（通常は転位なし）の状態に至る。

このとき、歯厚そのものを測るのは煩わしい作業となるから、容易に測れるまたぎ歯厚を計測する。一方歯溝幅を測る方法にオーバーピン（またはオーバーボール）による方法がある。中心をはさむ2か所の歯溝にはめたピンの外側を歯車直径方向に測るが、本稿では省略する。

#### 2.2 またぎ歯厚 (base tangential length) の性質

図2にまたぎ歯厚計測の原理を示す。インボリュート歯面の法線は基礎円に接する。接線を延長すれば、図にAA'で示すように、右側の歯の右歯面と左側の歯の左歯面それぞれ共通な法線となる。また接点Tが左右に移動しても、接線上で接点から歯面までの距離の和は一定である。すなわち線分AA', BB'の長さは等しい。さらに線分CDとも等しくなる。

点Aと点A'で、歯面の接線は平行なので、専用のマイクロメータを当てれば、この長さを容易に計測できる。通常のマイクロメータのアンビル部分の対向面が広い平面となるように皿形となっており、歯溝内に侵入できるようになっている。測定の際に線分AA'の位置を厳密に定める必要はない。皿形のフィーラが座りのよい場所に収まってくれるので好都合である。

基礎円の接線が左側と右側の歯面の共通法線となるのは、BD, CB'のように、2枚をまたぐ場合や4枚をまたぐ場合もある。しかし、この図の場合5枚をまたぐのは無理である。一般には歯面上の基準円（あるいはかみ合いピッチ円）に近いところを測る。歯車の歯数が多くなると、またぐ

\* Haruo Houjoh 東京工業大学 名誉教授 工博

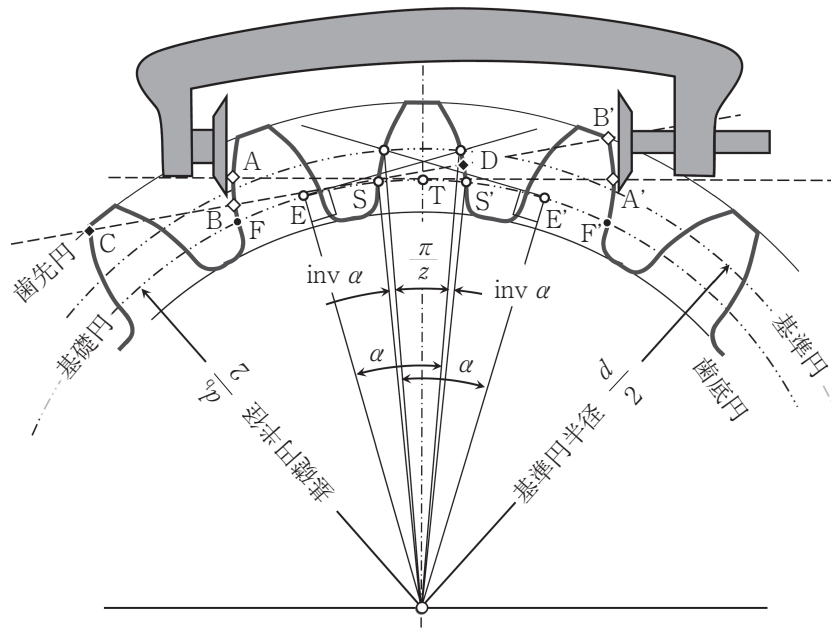


図2 またぎ歯厚の計測法:基礎円に接する左右歯面の共通法線と、歯厚マイクロメータ。本図では2枚と3枚及び4枚までまたげる。

歯数はおのずと多くなる。

### 2.3 またぎ歯厚の算出

線分 AA' を例にとりまたぎ歯厚の算出法を以下に説明をする。この線分の長さは基礎円上の円弧長さ FF' に等しい。この円弧長さは、左右端

の歯から1基礎円ピッチ（法線ピッチ）と、中央の歯の基礎円歯厚  $\widehat{SS'}$  の和になる。

基礎円歯厚を求めるためには、図中に示したインボリュート関数 ( $\text{inv } \alpha$ , 解説参照) を利用する。転位しない標準の歯車の場合、基礎円歯厚を歯車中心から見込む角は、角度ピッチの1/2に、ピッチ点とインボリュート曲線の起点を見込む角 ( $\text{inv } \alpha$ ) の2倍を加えたものになるので、式(1)で表せる。またぐ歯数  $z_m$  は、測定点が基準円に近くなるように、式(2)に基づいて定め、式(1)に代入する。

$$s_m = m \cos \alpha \{ \pi (z_m - 0.5) + z \text{inv } \alpha \} + 2x m \sin \alpha \quad (1)$$

$$z_m = \left[ \frac{\alpha z}{\pi} + 0.5 \right] \quad (2)$$

ここで、 $[ ]$  はこれに最も近い整数を表す。

なお式(1)では転位係数  $x$  が加味されている。転位すると基準円上での歯厚が1/2ピッチでなくなるためにまたぎ歯厚も変化する。今日では歯車設計ソフトウェアで簡単に計算できる。

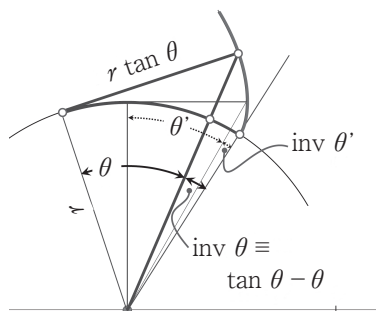
### 3 かみ合い率

運転時の荷重変動や強度に関する性能を推し量る指標の代表格が、かみ合い率である。

解説：インボリュート関数

インボリュート歯車同士のかみ合いを幾何学的に論ずるときに重要な関数で、下図に定義を示す。かみ合う歯車のバックラッシュや中心距離など、基礎円上での歯厚が必要となってこの関数の出番となる。

作用線と歯面の交点および基礎円との接点、基礎円上におけるインボリュート曲線の起点を角度で関係づける。



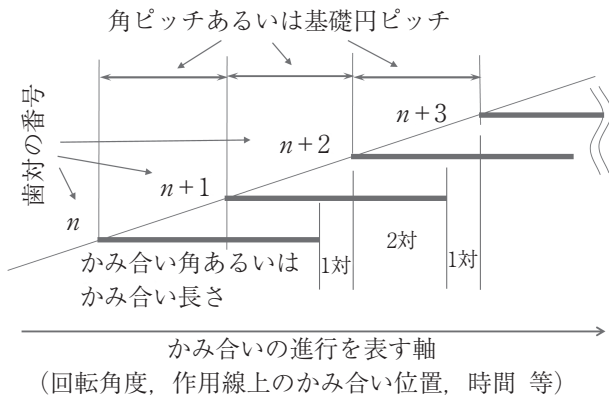


図3 歯対のかみ合いが進行する概略図

### 3.1 かみ合い率 (contact ratio)

かみ合い率は、JIS B 0102-1に、「正面かみ合い角を角度ピッチで除した値」と定義されている。かみ合い角は、ある歯が相手の歯とかみ合いを始めて終了するまでの回転角度である。かみ合い始めでは、1ピッチ先行する歯対がかみ合いの途中にある。結局かみ合い率は、歯がかみ合っている歯対の数を平均的にみた値、と理解できる(図3)。

本節では、平歯車のみを対象とし、軸直角の断面に限りて解説する。

### 3.2 正面かみ合い率 (transverse contact ratio) の算出

図4に、歯車対、歯先円、基礎円と作用線を描いている。歯車のかみ合い角、角度ピッチは作用線上における接触点の移動長さに対応づけられ

る。かみ合い角は、かみ合い長さ ( $K_1K_2$ ) に比例する。一方角度ピッチは、作用線上の基礎円ピッチに比例する。

図において  $I_1I_2 = O_1A$  である。一方線分  $I_1K_1$  と  $K_2I_2$  には  $K_1K_2$  がそれぞれに含まれていることからかみ合い長さ  $g$  (length of path of contact) は、

$$g = K_1K_2 = (I_1K_1 + K_2I_2) - O_1A \quad (3)$$

となる。直角三角形  $I_1O_1K_1$ ,  $I_2O_2K_2$ ,  $AO_1O_2$  に三平方の定理を適用して、かみ合い率  $\epsilon_\alpha$  は、

$$\epsilon_\alpha = \frac{(\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - a \cos \alpha)}{p_b} \quad (4)$$

となる。

かみ合い率の値が1～2であれば、2対と1対のかみ合いが交互に繰り返されることを意味し、2を越えると3対と2対のかみ合いが交互に繰り返される。なお、通常の標準基準ラック歯形に合わせて造られた歯車のかみ合い率は2を越えることはない。

かみ合い率を設計に活用するには、実際に動力を伝達するときの運転性能との関係を知る必要があり、別稿に取り上げる。

## 4 歯面間のすべりとすべり率

歯車は、その機構上歯面がすべりながらかみ合

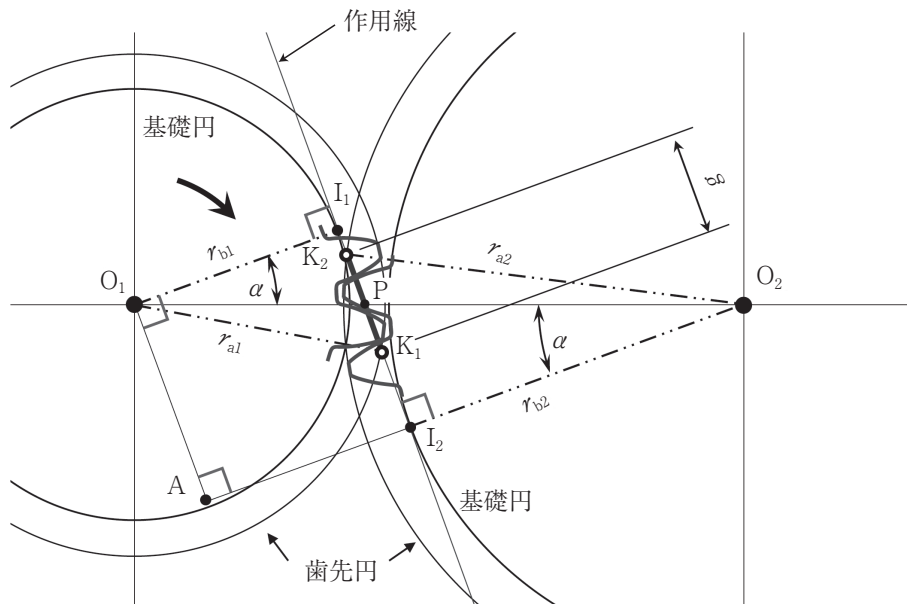


図4 かみ合い率計算の説明図

うのは自明である。荷重を伝えながらすべれば、摩擦力により運転時の発熱を生じるので、これも設計上重要なファクタとなる。また、潤滑を考えるとときにも考慮すべき事項である。

#### 4.1 すべり速度

図5(a)は、すべりを理解するために、かみ合いの様子を作用線が鉛直になるように表示している。歯面上の点は、それぞれの歯車軸に関して円周方向に運動する。そして2点が接触してかみ合いが成立しているときは、それらの作用線方向の運動速度成分は等しく $v_n$ と表せる。その結果、図に示すようにこの成分を生み出す円周方向速度ベクトルが描け、歯面接線方向の運動速度成分 $u_1, u_2$ が、次式で表せるように得られる。

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= v_n \tan \varphi_1 \\ u_2 &= v_n \tan \varphi_2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

図に示すように、ピッチ点より手前（かみ合い始め側）と、ピッチ点以降のそれぞれの速度ベクトルでは、すべり方向の速度の大小が切り替わる。

図5(b)にこれらの速度を作用線方向速度で無次元化して示す。すべりは二つの差であるが、

ピッチ点でゼロ、この位置から遠ざかるほど大きくなるので、モジュールが大きくなると大きくなる。

#### 4.2 すべり率

駆動側と被動側の歯面の相対的な運動によるすべりは、すべり率で評価される。

すべり率は、自身の面内速度に対する相手のすべり速度で定義されるので、以下の通りとなる。

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{u_2 - u_1}{u_1} \\ \gamma_2 &= \frac{u_1 - u_2}{u_2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

すべりが大きい、あるいはすべり率が大きい領域では、すべり速度と荷重の積による発熱が、歯車運転時の摩擦損失となることと同時に、スカuffingあるいは焼き付きという現象が発生する可能性があり、留意が必要となる。

### 4 はすば歯車の幾何学的基礎

はすば歯車が幅広く用いられている理由は、振動騒音面で有利だからである。単に歯をねじっただけのはすば歯車であるが、平歯車と対比させな

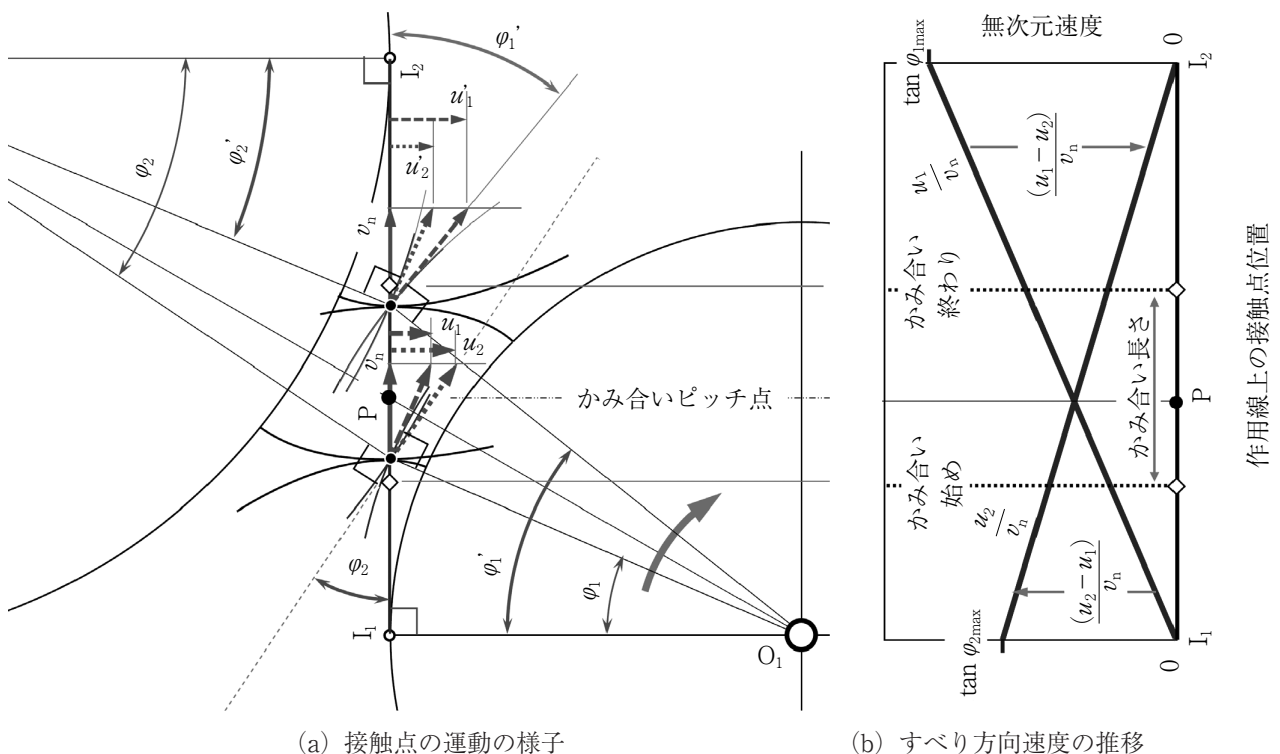


図5 歯のすべりの幾何学

がらはずば歯車を考えるとき、二つの断面を意識するため、訳が分からなくなることも多い。そこで、はずば歯車の幾何学的基礎（圧力角や基準円等）を理解する。

はずば歯車の定義は「歯すじがつるまき線である歯車」である。歯すじは基準円筒と歯面の交線であって、歯すじを描いたピッチ円筒を平面に展開すればつるまき線は直線となる。この傾き角がねじれ角（helix angle）である。

#### 4.1 ラックとかみ合うはずば歯車

はずば歯車をラックとのかみ合いの形式で図6に示す。同図(a)は、すぐばラックと平歯車のかみ合いを示している。

ここから始め、同図(b)は薄いラックを積層させて歯のねじり方向に少しずつずらしたもので、層を限りなく薄くすれば同図(c)に示す、はずばラックとははずば歯車のかみ合いになる。この考え方に基けば、はずば歯車を運転したときのすべりは、積層した歯の歯形方向にしか無いことが理解できる。また軸直角断面のピッチは、 $p_t = p$ である。

一方、同図(d)のように、すぐばラックを角度 $\beta$ 傾けて運動させることもできる。この状態では、歯すじ方向にすべりが生じるので、ラックの歯すじ方向の運動速度成分をキャンセルするように運動させると、同図(e)のようにはずばラックとははずば歯車のかみ合い運動が表せる。なおこのとき、ラックの軸直角断面におけるピッチは、 $p_t = p / \cos \beta$ となる。ここで添え字tは軸直角断面を表す。

図6(c)と(e)のどちらも、歯車軸に対して歯すじは角度 $\beta$ だけ傾いているが、ピッチが異なるので、製作には異なる工具が必要となる。このため、はずば歯車の設計製造に際して、どちらを出発点に置くかを明確にしなければならない。

前者を「軸直角方式」とよび、後者を「歯直角方式」とよぶ。後者では標準基準ラックに基づく工具がそのまま使用できるため、一般に広く用いられている。しかし一方で、歯車のかみ合いの幾何学的考察は、軸直角断面内での諸量を用いて行うのが好都合である。その際歯車の諸寸法を表すときに、軸直角断面を表す添え字tと歯直角断面を表す添え字nが交錯する。

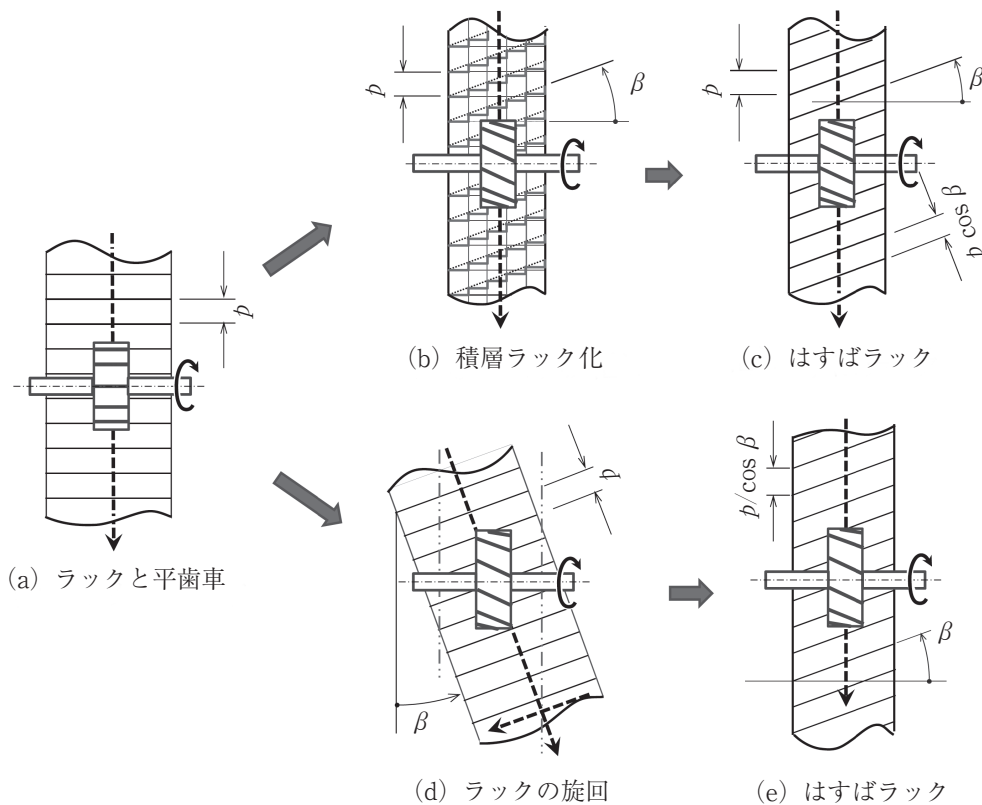


図6 ラックから出発したはずば歯車の考え方

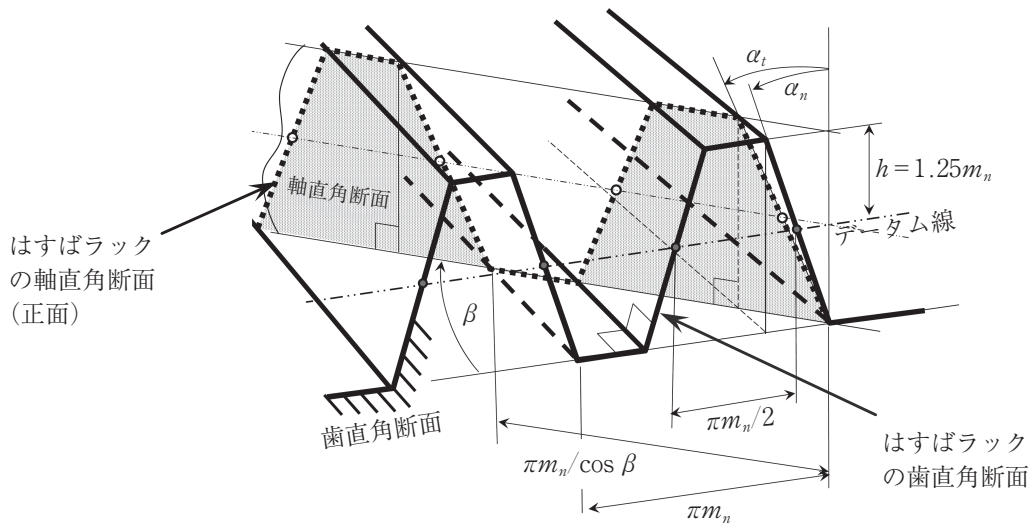


図7 はすばラックの歯直角断面と軸直角断面の関係

そこで、はすば歯車にかみ合っているラックにおける歯直角断面 (normal section, 添え字 n) および、軸直角断面 (transverse section 添え字 t) でのパラメータの関係を再確認する。なお、軸直角断面の日本語訳は一般には「正面」である。

図7は、図6(e)の歯直角方式に基づいてはすばラックを描いたもので、歯直角断面を太い実線で、軸直角断面を太い点線で表している。

#### 4.2 正面モジュール, 正面圧力角

角度  $\beta$  傾いた歯の軸直角断面の正面モジュールは図から、

$$m_t = \frac{m_n}{\cos \beta} \quad (7)$$

正面圧力角  $\alpha_t$  と歯直角断面での圧力角  $\alpha_n$  は、

$$\tan \alpha_n = \tan \alpha_t \cos \beta$$

$$\text{または } \alpha_t = \tan^{-1} \left( \frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta} \right) \quad (8)$$

と関係づけられる。

一例として、ねじれ角  $\beta = 30^\circ$ ,  $\alpha = 20^\circ$  とすると、正面圧力角は  $\alpha_t = 22.8^\circ$  へと大きくなり、モジュールは  $m_t = 1.15m_n$  となる。

#### 4.3 基準円筒直径と基礎円筒直径

基準円筒直径は正面モジュールに比例するので、

$$d = z m_t = \frac{z m_n}{\cos \beta} \quad (9)$$

これに対応して、基礎円筒直径は、

$$d_b = d \cos \alpha_t = z \frac{m_n}{\cos \beta} \cdot \cos \alpha_t \quad (10)$$

となる。基礎円筒直径は、基準円筒直径と正面圧力角の両方の影響を受けることに注意を要する。

#### 4.4 基礎円筒ねじれ角

図8は、はすば歯車の基礎円筒と作用平面との関係を立体視したものである。歯面と作用平面の交線が相手歯車との接触線となる。接触線は直線で複数の歯面に存在し、同時接触線とよぶ。

円筒母線に対する接触線の傾き角を基礎円筒ねじれ角 (base helix angle) とよび、 $\beta_b$  で表す。はすば歯車は図3(c)のように、両端面で歯車の回転角がずれているだけであることから、

$$\tan \beta_b = \tan \beta \cos \alpha_t \quad (11)$$

と関係づけられる。

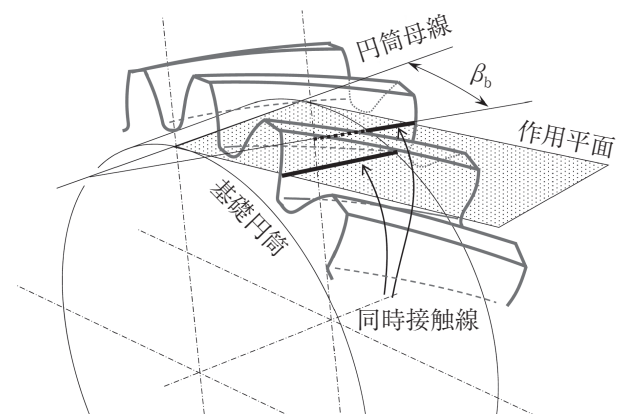


図8 基礎円筒ねじれ角と同時接触線

### 4.5 中心距離と転位

歯直角方式により平歯車と同じラック形工具ではすば歯車を造ると、同じ歯数の平歯車に対して基準円直径が大きくなる。したがって、中心距離を変えずにねじれ角を与えるためには、負の転位を与えて、かみ合いピッチ円直径を小さくしなければならない。

歯数比の変更が可能であれば、歯数比も調整する。転位と中心距離の関式は、本稿では省略するので、参考図書を参照されたい。

### 4.6 はすば歯車のかみ合い率

前出のようにかみ合い率は、「全かみ合い角を角ピッチで除した値」である。作用平面上で考えるなら、作用平面上でかみ合っている区間の長さを基礎円ピッチで割ればよい。

図9のように、かみ合い始め側の端面にかみ合い終りの位置を投影すれば、かみ合い角に対応して見かけのかみ合い長さが得られる。これから全かみ合い率は、式(4)の正面かみ合い率  $\varepsilon_\alpha$  とかみ合い角の増加分に対応する **重なりかみ合い率**  $\varepsilon_\beta$  (overlap ratio) の和となり次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\gamma &= \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta \\ \varepsilon_\beta &= \frac{b \cos \beta}{p_t} = \frac{b \cos \beta_b}{p_{bt}} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

表1 歯直角方式で直角圧力角  $\alpha_n$ 、ピッチ円筒上ねじれ角  $\beta$ 、歯数  $z$  から求める幾何学的諸量の例  
(主として転位係数が関係するもの)

項目	記号	計算式
歯直角転位係数	$x_n$	中心距離に合わせて決める
正面かみ合い圧力角	$\alpha_w$	$\text{Inv}^{-1} \left\{ 2 \tan \alpha_t \left( \frac{x_{n1} + x_{n2}}{z_1 + z_2} \right) + \text{inv } \alpha \right\}$
ピッチ円直径	$d_w$	$\frac{d_b}{\cos \alpha_{wt}}$
中心距離修正係数	$y$	$\frac{z_1 + z_2}{2 \cos \beta} \left( \frac{\cos \alpha_t}{\cos \alpha_{wt}} - 1 \right)$
中心距離	$a$	$\left( \frac{z_1 + z_2}{2 \cos \beta} + y \right) m_n$
歯たけ	$h$	$\{ 2.25 + y - (x_{n1} + x_{n2}) \} m_n$
歯先円直径	$d_a$	$d + 2m_n$

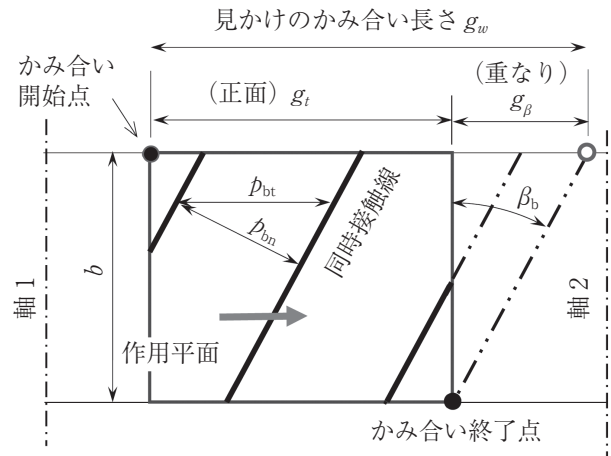


図9 見かけのかみ合い長さとかみ合い率

### 4.7 その他の留意事項

歯直角方式によってはすば歯車対を設計する際、設計のパラメータを決定するのに転位係数が重要となる。説明は省略するが、表1に、関係するいくつかの係数や量をまとめた。また計算の結果、歯たけが短いなどの違和感もあり得る。

なお、はすば歯車は、右ねじれと左ねじれの一对を用意しないとかみ合わない。

## 5 おわりに

インボリュート歯車を、設計を含めて使いこなすには、幾何学的成り立ちの認識は重要である。CADなどで用は足りても、転位係数などのパラメータを調整するのは訳の解る人である。

次回からは、運転性能を視点において、強度、歯形修整などの関わりを解説する。

### 参考図書

- 1) JIS B 0102-1 : 2013 歯車用語—第1部：幾何形状に関する定義
- 2) JIS B 1701-1 : 2012 (ISO53 : 1998) 第1部, 同-2 : 2017第2部 円筒歯車—インボリュート歯車歯形
- 3) 日本機械学会編：機械工学便覧 デザイン編β-4, 2005, 丸善
- 4) 日本歯車工業会編：新歯車便覧, 1990
- 5) Maag Gear Company : Maag Gearbook, 1990等